UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P DE MATEMÁTICA

Teorema de factorización de Hadamard para funciones enteras

TESIS

para optar el título profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

German Mendoza Villacorta

LIMA – PERÚ

2011

TEOREMA DE FACTORIZACIÓN DE HADAMARD PARA FUNCIONES ENTERAS

GERMAN MENDOZA VILLACORTA

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas.

Aprobado por:

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro.

Mg. Claudio Fernando Balcázar Huapaya.

Lic. Víctor Hilario Tarazona Miranda.

Lima - Perú

2011

FICHA CATALOGRÁFICA

GERMAN. MENDOZA VILLACORTA

Teorema de Factorización de Hadamard para Funciones Enteras,

LaTeX, (Lima) 2011.

viii, 46 p. 29,7 cm. (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2011)

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1, Matemática.

I. UNMSM/FdeCM II. Título (serie)

DEDICATORIA

- *A Santiago Honorio mi amado padre por el apoyo y la amistad que siempre me brindo.*
- *A Marcelina mi adorada madre por su paciencia , sus consejos y su amor incondicional.*
- *A mis hermanos Lin, Andres y Jan por su comprensión, su apoyo y estar siempre a mi lado.*

Agradecimientos

Al Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro, por asesorarme en la elección, elaboración y desarrollo de la presente tesis, y sobre todo, por la enorme paciencia que me brindó.

Al Mg. Claudio Balcazar Huapaya, por sus importantes observaciones luego de revisar mi tesis, las mismas que me permitieron desarrollarla de mejor manera.

Al Lic. Víctor Hilario Tarazona Miranda, por asesorarme, y ser miembro del jurado de la presente tesis, y por la paciencia brindada.

A Jhonny Pérez, Juan Rodríguez, Joel Rojas, Cesar Rayme, Yonny Santaria, Tania Martínez, Luis Huacausi, etc. Compañeros de nuestra facultad, por esa gran amistad y apoyo.

A Jehová el todopoderoso, que conoce todo y es fuente de todo conocimiento. Porque lo insensato de Dios es más sabio que los hombres y lo débil de Dios es más fuerte que los hombres. Cualquier conocimiento que el hombre tenga proviene de Él.

German Mendoza villacorta

RESUMEN

Teorema de Factorización de Hadamard para Funciones Enteras

GERMAN MENDOZA VILLACORTA

Noviembre - 2011

Asesor : Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro.

Título Obtenido : Licenciado en Matemática.

Una función entera puede ser considerada como un "polinomio de grado infinito". Por lo tanto surge la siguiente pregunta ¿Puede la teoría de polinomios ser generalizada a una función entera?. Por ejemplo ¿una función entera puede ser factorizada?.

El teorema de factorización de Hadamard afirma que toda función entera de orden finito posee género finito; esto nos da una forma de factorizar funciones enteras. Para ello estudiaremos los conceptos de rango, orden y género de funciones enteras y las relaciones que hay entre ellos.

Palabras Claves : Rango de una Función Entera
Orden de una Función Entera
Género de una Función Entera

ABSTRACT

Hadamard Factorization Theorem for Entire Functions

GERMAN MENDOZA VILLACORTA

November - 2011

Adviser : Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro.

Obtained Degree : Mathematician.

An entire function can be considered an infinite degree polynomial. So the question arises. Can the theory of polynomials be generalized to an entire function?. For example, any entire function can be factored?

The Hadamard factorization theorem states that any entire function of finite order has finite genus, this gives us a way of factoring entire functions. For this study the concepts of range and gender order of entire functions and the relationships between them.

Keywords : Range of an Entire Function

Order of an Entire Function

Gender of an Entire Function

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo estudiaremos algunos resultados conocidos de una Variable Compleja para usarlos posteriormente.

1.1. Funciones Analíticas

Definición 1.1. Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f : G \to \mathbb{C}$ diremos que f es *diferenciable* en el punto $a \in G$ si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

El valor de este límite es denotado por $f'(a)$ y es llamado la *derivada* de f en a. Si f es diferenciable en cada punto de G diremos que f es *diferenciable* sobre G. Note que si f es diferenciable en G, entonces $f'(a)$ define una función $f' : G \to \mathbb{C}$, si f' es continua diremos que f es *continuamente diferenciable.*

Proposición 1.1. *Si f es diferenciable en el punto $a \in G$, entonces f es continua en a.*

Demostración.

$$\lim_{z \to a} |f(z) - f(a)| = \left[\lim_{z \to a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|}\right] \left[\lim_{z \to a} |z - a|\right] = |f'(a)| 0 = 0 \qquad \blacksquare$$

Definición 1.2. Una función $f : G \to \mathbb{C}$ es *analítica* si f es contínuamente diferenciable en G.

Se sigue como en el cálculo que la suma y el producto de funciones analíticas son analíticas, además si f y g son analíticas sobre G y G_1 es el conjunto de puntos de G donde g no se anula, entonces f/g es analítica en G.

Proposición 1.2 (Regla de la Cadena). *Sean f y g funciones analíticas en G y V respectivamente, supongamos que $f(G) \subset V$ entonces $g \circ f$ es analítica en G y además*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z); \quad \forall z \in G.$$

Demostración. Ver [1], página 39. ■

Proposición 1.3. *Si G es abierto conexo y $f : G \to \mathbb{C}$ es deferenciable con $f'(z) = 0$ para todo $z \in G$, entonces f es constante.*

Demostración. Ver [1], página 37. ■

Definición 1.3. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, u y v funciones reales definidas en U.

a) Decimos que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemman en $(x_0, y_0) \in U$ si existen las derivadas parciales de u y v en (x_0, y_0) cumpliendo

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Decimos que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemman sobre U si y solo si la satisfacen en todo punto de U.

Proposición 1.4. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ y $f = u+iv$ tal que $f : G \to \mathbb{C}$, si f es diferenciable en $z_0 = (x_0, y_0)$, entonces existen las derivadas parciales de u y v en $z_0 = (x_0, y_0)$ y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemman.*

Demostración. Ver [2], página 47. ■

Proposición 1.5. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ y $f = u + iv$ tal que $f : G \to \mathbb{C}$, si existen las derivadas parciales de u y v y además son continuas y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemman en $z_0 = (x_0, y_0)$, entonces f es diferenciable en z_0.*

Demostración. Ver [2], página 48. ∎

Se cumple en variable compleja un resultado análogo al teorema de Leibniz para variable real, veamos.

Proposición 1.6. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y sean $f : \Omega \times [a, b] \to \mathbb{C}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, sea la función dada por*

$$F(z) = \int_a^b f(z, t)g(t) \,\mathrm{d}\, t.$$

Entonces F es continua en Ω y si (para $i = 1, 2$) existe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

y es continua en $\Omega \times [a, b]$, entonces existe

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(z, t)g(t) \,\mathrm{d}\, t$$

y es continua en Ω.

Demostración. Tomemos $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ y sea D un disco cerrado de centro z_0 contenido en Ω. Sea M una cota de g en $[a, b]$. Como f es uniformemente continua en $D \times [a, b]$, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z, t) - f(z_0, t)| < \epsilon/M(b - a)$, para todo $t \in [a, b]$. Por consiguiente, si $|z - z_0| < \delta$ se cumple

$$|F(z) - F(z_0)| = \int_b^a |f(z, t) - f(z_0, t)||g(t)| \,\mathrm{d}\, t \leq \epsilon$$

Esto pueba que F es continia en z_0.

Supongamos ahora la hipotesis de derivabilidad, por ejemplo respecto a x. Como $\partial f/\partial x$ es uniformemente continua en $D\times[a,b]$ exixte una $\delta>0$ tal que si $|h|<\delta$ entonces

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h,y_0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t)\right|<\frac{\epsilon}{M(b-a)},\quad \text{para toto } t\in[a,b]$$

si $|h|<\delta$ y $t\in[a,b]$ el teorema del valor medio nos da un $r\in\mathbb{R}$ tal que $|r|<|h|$ y

$$f(x_0+h,y_0,t)-f(x_0,y_0,t)=\frac{\partial f}{\partial x}f(x_0+r,y_0,t)h.$$

(notar que r depende de t.) Por consiguiente,

$$\left|\frac{f(x_0+h,y_0,t)g(t)-f(x_0,y_0,t)g(t)}{h}-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t)g(t)\right|$$

$$=\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+r,y_0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t)\right||g(t)|<\frac{\epsilon}{(b-a)}.$$

De aquí se sigue claramente que

$$\left|\frac{F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)}{h}-\int_b^a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t)g(t)\,\mathrm{d}\,t\right|<\epsilon$$

siempre que $|h|<\delta$, luego existe

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)}{h}=\int_b^a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,t)g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Además la derivada es continua por la primera parte de este mismo teorema. ■

A partir de aquí podemos probar.

Teorema 1.1. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, sea $\phi:[a,b]\to\mathbb{C}$ una arco diferenciable por partes y $f:\Omega\times\phi([a,b])\to\mathbb{C}$ una función continua con derivada compleja respecto a la primera variable $f':\Omega\times\phi([a,b])\to\mathbb{C}$, continua. Sea $F:\Omega\to\mathbb{C}$ la función dada por $F(z)=\int_\phi f(z,\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta$. Entonces F es analítica en Ω y su derivada es*

$$F'(z)=\int_\phi f'(z,\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta.$$

Demostración. Como ϕ es derivable. Entonces

$$F(z) = \int_b^a f(z, \phi(t))\phi'(t) \, \mathrm{d}\, t.$$

Para aplicar el teorema anterior debemos separar las partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_b^a \operatorname{Re} f(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) \, \mathrm{d}\, t - \int_b^a \operatorname{Im} f(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi'(t) \, \mathrm{d}\, t \\ &+ i \int_b^a \operatorname{Re} f(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi' t \, \mathrm{d}\, t + i \int_b^a \operatorname{Im} f(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) \, \mathrm{d}\, t. \end{aligned}$$

Las cuatro integrales estan en las condiciones del teorema anterior. Al aplicarlo concluimos que F tiene derivadas parciales continuas. Concretamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \int_b^a \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) \, \mathrm{d}\, t - \int_b^a \frac{\operatorname{Im} f}{\partial x}(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi'(t) \, \mathrm{d}\, t \\ &+ i \int_b^a \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi' t \, \mathrm{d}\, t + i \int_b^a \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) \, \mathrm{d}\, t \\ &= \int_b^a f(z, \phi(t))\phi'(t) \, \mathrm{d}\, t = \int_\phi \frac{\partial f}{\partial x}(z, \zeta) \, \mathrm{d}\, \zeta. \end{aligned}$$

lo mismo vale para la derivada respecto a y. Del hecho de que f satisface las ecuaciones de Cauchy $-$ Riemman se sigue ahora que F también las cumple, luego F es holomorfa en Ω. La ecuación anterior es entonces equivalente a la relación entre la derivadas que aparecen en el enunciado. ■

Teorema 1.2 (Principio de Módulo Máximo). *Sea Ω un abierto y conexo en $\mathbb{C}$ y f una función analítica en Ω no constante.*

a) Si $D(z_0, r) \subset \Omega$ entonces existe un $z \in D(z_0, r)$, tal que $|f(z)| > |f(z_0)|$.

b) Para todo $z \in \Omega$ se cumple que $|f(z)| < \sup\{|f(z)|, z \in \Omega\}$.

c) Si Ω está acotado y f es continua en $\overline{\Omega}$, entonces para todo $z \in \Omega$ se cumple que $|f(z)| < \text{máx}\{|f(z)|, z \in \partial\Omega\}$.

Demostración. Ver [1], página 79 - 80. ■

1.2. Funciones Enteras

Definición 1.4. Sea $z_0 \in \Omega$ y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$, la serie de potencias de coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y centro z_0 es la serie funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Proposición 1.7. *Dada una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *se define el número* R, $0 \leq R \leq \infty$, *por*

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

El cual cumple:

a) Si $|z-a| < R$, *la serie converge absolutamente.*

b) Si $|z-a| > R$, *la serie diverge.*

c) Si $0 < r < R$, *entonces la serie converge uniformemente sobre* $\{z : |z| \leq r\}$.

El número R es el único número con las propiedades a) y b). El número R es llamado el radio de convergencia de la serie de potencias.

Demostración. Ver [1], página 31. ■

Teorema 1.3. *Sea f analítica en $D(a,r)$, entonces*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

para $|z-a| < r$, *donde*

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$$

y la serie tiene radio de convergencia mayor igual que r.

Demostración. Ver [1], página 72. ■

Corolario 1.1. *Si $f : G \to \mathbb{C}$ y $\overline{D}(a,r) \subset G$, entonces*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}\, w$$

Demostración. Ver [1], página 72. ■

Corolario 1.2 (**Estimativa de Cauchy**). *Si f es analítica en $D(a,r)$ y supongamos $|f(z)| \leq M$ para todo z en $D(a,r)$, entonces*

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

Demostración. Ver [1], página 73. ■

Definición 1.5. Una función entera es una función definida y analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

Proposición 1.8. *Si f es un función entera, entonces f tiene una expansión en serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

con radio de convergencia infinito.

Demostración. Ver [6], página 176. ■

La proposición anterior dice que una función entera se interpreta como un "polinomio de grado infinito".

Este es el caso de las funciones $\exp z, \operatorname{sen} z, \cos z$ puesto que todas sus derivadas de la función exponencial valen 1 en $z_0 = 0$ es claro que su serie de potencias es:

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Las derivadas de la función $\operatorname{sen} z$ en $z_0 = 0$ son

$$\operatorname{sen} 0 = 0, \cos 0 = 1, -\operatorname{sen} 0 = 0, -\cos 0 = -1, \operatorname{sen} 0 = 0, \ldots$$

y a partir de aquí se repiten cíclicamente. Por lo tanto la serie de Taylor de la función $\operatorname{sen} z$ en el origen, tiene solo potencias impares y con derivada $1, -1, 1, -1, \ldots$ así pues

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Un razonamiento similar nos lleva a

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

La función $\log z$ no está definida en 0, luego no podemos desarrollarla en una serie de este tipo. Podríamos desarrollarla en $z_0 = 1$, aunque es mejor trabajar en 0 con la función $\log(1+z)$. Su primera derivada vale $(1+z)^{-1}$ y de aquí se sacan fácilmente las siguientes

$$-(1+z)^{-2}, 2(1+z)^{-3}, -3 \cdot 2(1+z)^{-4}, 4 \cdot 3 \cdot 2(1+z)^{-5}, \ldots$$

Con lo que las derivadas sucesivas en cero valen

$$0!, -1!, 2!, -3!, 4!, -5!, \ldots$$

La serie de Taylor será, por lo tanto:

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n \tag{1.1}$$

convergente para $|z| < 1$, pues la función es analítica en dicho disco y no puede extenderse a un disco mayor (tiende a infinito en -1).

El hecho de que las funciones analíticas admitan desarrollo en series de potencias alrededor de cada punto tiene muchas consecuencias, algunas de las cuales se presentan a continuación.

Teorema 1.4 (Teorema de Lioville). *Toda función entera y acotada es constante.*

Demostración. Ver [1], página 77. ∎

Teorema 1.5 (**Teorema Fundamental del Algebra**). *Si $p(z)$ es un polinomio no constante, entonces existe un número complejo a tal que $p(a) = 0$.*

Demostración. Ver [1], página 77. ■

Corolario 1.3. *Si p es un polinomio y $a \in \mathbb{C}$, existe $b \in \mathbb{C}$ tal que $p(b) = a$.*

Demostración. Considerar el polinomio $p(z) - a$ en el teorema anterior. ■

Corolario 1.4. *Si $p(z)$ es un polinomio, $a_1, \ldots, a_n$ son sus ceros, además a_j tiene multiplicidad k_j, entonces*

$$p(z) = c(z - a_1)^{k_1} \ldots (z - a_n)^{k_n}$$

para alguna constante c y $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ es el grado de $p(z)$.

Demostración. Ver [1], página 77. ■

El teorema siguiente trata de generalizar el teorema anterior a cualquier función analítica.

Definición 1.6. Si $f : G \to \mathbb{C}$ es analítica y $a \in G$ satisface $f(a) = 0$, entonces diremos que a es un cero de multiplicidad $m \geq 1$, si existe una función analítica $g : G \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = (z - a)^m g(z), \text{ donde } g(a) \neq 0.$$

Proposición 1.9. *Si f es analítica en G abierto conexo y no idénticamente nula, entonces para cada $a \in G$ tal que $f(a) = 0$, existe un número n mayor o igual que 1 y una función analítica $g : G \to \mathbb{C}$ tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z - a)^n g(z)$ para todo $z \in G$, esto es, cada cero de f tiene multiplicidad finita.*

Demostración. Ver [1], página 79. ■

1.3. Teorema de Factorización de Weierstrass

Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, (M, d) un espacio métrico completo. Siendo $M = \mathbb{C}$ o $\mathbb{C}_\infty$.

Definición 1.7. Sea $C(G, M) = \{f : G \to \mathbb{C} : \ f \text{ es continua}\}$.

Notemos que en el caso de $M = \mathbb{C}$ o $\mathbb{C}_\infty$ nuestro espacio es completo, ahora consideremos:

1. $G \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto.

2. $T = \{k_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ un encebollamiento en G, es decir, una familia de conjuntos tales que

   - k_n es compacto para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.
   - $k_n \subset \operatorname{Int}(k_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.
   - $G = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} k_n$.

3. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos

$$d_n : C(G, M) \times C(G, M) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

   como

$$d_n(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) : \ z \in k_n\}$$

Observemos que $d_n(f, g)$ es finito pues k_n es compacto, sin embargo d_n es solo una semimétrica.

Definamos

$$d : C(G, M) \times C(G, M) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

por

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)}$$

la cual es una métrica en $C(G, M)$.

Proposición 1.10. $(C(G, M), d)$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración. Ver [1], página 145. ■

Definición 1.8. Sea $G \subset \mathbb{C}$ abierto, definimos $H(G)$ como el conjunto de todas las funciones analíticas sobre G.

1. Observemos que $H(G) \subset C(G, M)$.

2. Diremos que una sucesión de funciones analíticas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H(G)$ converge en $H(G)$ si converge en la métrica de $C(G, M)$.

Proposición 1.11. *sea G un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$. entonces los siguientes resultados son equivalentes:*

(a) G es simplemente conexo.

(b) Dado $f \in H(G)$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in G$, existe una función $g \in G$ tal que $f(z) = \exp g(z)$.

(c) Dado $f \in H(G)$ exixte una suseción de polinomios que convergen a f.

(d) G es homeomorfa al disco unitario.

(e) Dado $f \in H(G)$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in G$, existe una función $g \in G$ tal que $f(z) = [g(z)]^2$.

(f) Toda función $f \in H(G)$ tiene una primitiva.

(g) $\mathbb{C}_\infty - G$ es un conjunto conexo.

Demostración. Ver [1], página 202. ■

Comentario .

Dada una sucesión $\{a_n\}$ en una región G la cual no tiene puntos límites en G y una sucesión de enteros $\{m_n\}$, surge el siguiente problema ¿Existe una función analítica en G tal que sus únicos ceros sean los puntos a_n y que en cada punto a_n tenga multiplicidad m_n? la respuesta a este problema es si y el resultado fue dado por Weierstrass.

Si fueran un número finito de puntos $a_1, \ldots, a_j$ entonces por el teorema fundamental del algebra $f(z) = (z-a_1)^{m_1} \ldots (z-a_j)^{m_j}$ será la función deseada ¿Qué pasaría si fueran un número infinito de puntos en la secuencia? para responder esta pregunta discutiremos la convergencia de productos infinitos de números y funciones.

Definición 1.9. Si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos y si $z = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k$ existe, entonces z es el producto infinito de los números z_n y este es denotado por $z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

Con esta definición es claro que un producto (con factores no nulos) $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente si y solo si lo es cualquiera de sus secciones finales $\prod_{n=k}^{\infty} z_n$, en tal caso

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 \ldots z_{k-1} \prod_{n=k}^{\infty} z_n \tag{1.2}$$

Si $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ es un producto donde a lo sumo un número finito de factores son nulos, diremos que converge si converge cualquiera de los productos $\prod_{n=k}^{\infty} z_n$, donde k es un índice tal que $z_n \neq 0$ para $n \geq k$. En tal caso definamos el límite mediante la fórmula (1.2).

Proposición 1.12. *Si un producto* $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ *es convergente, entonces* $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

Demostración. Ver [7], página 191. ■

Proposición 1.13. *Si* $\mathrm{Re}(z_n) > 0$*, entonces el producto* $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente si la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}(z_n - 1)$ *converge absolutamente.*

Demostración. Ver [1], página 166. ■

Proposición 1.14. *Un producto infinito de no factores nulos* $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ *es convergente si y sólo si lo es la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \log z_n$*. En tal caso la serie es el logaritmo del producto.*

Demostración. Sea $S_k = \sum_{n=0}^{k} \log z_n$. Entonces $e^{S_k} = \prod_{n=0}^{k} z_n$. De quí se sigue que si la seria converge, entonces el producto converge (a un número no nulo) y la serie es un logaritmo del producto.

Supongamos ahora que el producto converge. Esto significa que existe

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{n=0}^{k} z_n = z \neq 0, \quad \text{luego} \quad \lim_{k\to\infty} \prod_{n=0}^{k} |z_n| = |z| \neq 0$$

Aplicamdo la función log real tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \log|z_n| = \log|z|$.

Sea $\arg : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una determinación del argumento que sea continua en un entorno de z, Basta tomar una de las funciones argumento y extenderla a la semirrecta que falta, esto únicamente por comodidad en el argumento que sigue.

Sea $\phi_k = \arg \prod_{n=0}^{k} z_n$. Entonces la suseción $\{\phi_k\}$ converge a $\arg z$. Por otra parte, el argumento de un producto es la suma de los argumentos de los factores, es decir $\sum_{n=0}^{k} \arg' z_n$ es también un argumento de $\prod_{n=0}^{k} z_n$, donde $\arg'$ representa el argumento en el intervalo $]-\pi, \pi]$. Como dos argumentos se diferencian en un múltiplo de 2π, exixte una suseción de números enteros $\{m_k\}$ tales que

$$\phi_k = \sum_{n=0}^{k} \arg' z_n + 2m_k\pi.$$

Ahora bien, como el producto converge, la suseción $\{z_n\}$ tiende a 1 (proposición 1.12) y, apartir de un término dado, $\arg' z_n \neq \pi$, o sea, $|\arg' z_n| < \pi$. Por otro lado la suseción

$$|\phi_{k+1} - \phi_k| = |\arg' z_{k+1} + 2\pi(m_{k+1} - m_k)|$$

tiende a 0, luego apartir de un término es menor que π. las desigualdades

$$|\arg' z_{k+1} + 2\pi(m_{k+1} - m_k)| < \pi \quad \text{y} \quad |\arg' z_{k+1}| < \pi$$

implican que $|m_{k+1} - m_k| < 1$ y, como son números esteros, $m_{k+1} = m_k$ para todo k suficientemente grande.
puesto que la suseción $\{m_k\}$ es finalmente constante, es convergente, luego también lo es la suseción

$$\sum_{n=0}^{k} \arg' z_n = \phi_k - 2m_k\pi.$$

En resumen tenemos que las series $\sum_{n=0}^{\infty} \log |z_n|$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \arg' z_n$ son ambas convergentes, pero estas series son la parte real y la parte imaginaria de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log z_n$, que es, pues, convergente. ■

Proposición 1.15. *Si G es un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y si $\{f_n\}$ es una sucesión en $H(G)$ tal que f_n no es idénticamente nula para todo $n \in \mathbb{N}$. Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} [f_n(z) - 1]$$

converge absoluta y unifomemente sobre subconjuntos compactos de G, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge en $H(G)$ a una función analítica $f(z)$. Si a es un cero de f, entonces a es un cero de solamente un número finito de funciones f_n y la multiplicidad de a en f es la suma de las multiplicidades de los ceros de los f_n en a.

Demostración. Ver [1], página 168. ■

Comentario .

Retornado a la discusión original del problema planteado en el comentario anterior. Si $\{a_n\}$ es un sucesión en una región G sin puntos límite (pero posiblemente algunos puntos pueden ser repetidos un número finito de veces), consideremos la función $(z-a_n)$, de acuerdo a la proposición anterior si podemos encontrar funciones $g_n(z)$ analíticas sin ceros en G tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(z-a_n)g_n(z)-1]$$

converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de G, entonces la siguiente función

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(z-a_n)g_n(z)$$

es analítica y tiene ceros solamente en los puntos $z=a_n$, el camino para asegurar que $g_n(z)$ nunca se anula es expresarlo como

$$g_n(z)=\exp h_n(z)$$

para alguna función analítica $h_n(z)$. En efecto si G es simplemente conexo entonces se sigue que $g_n(z)$ tiene necesariamente esta forma (proposición 1.11). Estas funciones $g_n(z)$ fueron estudiadas e introducidas por Weierstrass.

Definición 1.10. Un factor elemental de Weierstrass es una de las siguientes funciones $E_p(z)$ para $p=0,1,2,\ldots$

$$\begin{aligned}
E_0(z) &= 1-z\\
E_p(z) &= (1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^p}{p}\right);\ p\geq 1
\end{aligned}$$

Además:

1. $E_0(z)$ y $E_p(z)$ con $p\geq 1$ son analíticas.

2. $E_0(z)$ y $E_p(z)$ con $p\geq 1$ tienen ceros simples en $z=1$.

3. Si $a\in\mathbb{C}$ y $a\neq 0$, entonces $E_p(z/a)$ es analítica y tiene un único cero simple en $z=a$ para todo $p\geq 1$.

4. Si $G\subset\mathbb{C}$ abierto conexo y $b\in\mathbb{C}\setminus G$, entonces $E_p((a-b)/(z-b))$ tiene un cero simple en $z=a$ para todo $p\geq 1$ y es analítica.

La proposición 1.15 ayuda a probar el siguiente teorema.

Teorema 1.6. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ y $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$ (esta no es una secuencia de puntos distintos pero por hipótesis ningún punto se repite un número infinito de veces). Si $\{p_n\}$ es cualquier secuencia de enteros tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < +\infty \tag{1.3}$$

para todo r, entonces

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

converge en $H(G)$.

La función f es una función entera con ceros solamente en los puntos a_n. Si z_0 se repite en la secuencia $\{a_n\}$ exactamente m veces, entonces f tiene un cero en $z = z_0$ de multiplicidad m, además si $p_n = n - 1$ entonces (1.3) se satisface.

Demostración. Ver [1], página 170. ■

Teorema 1.7 (Teorema de Factorización de Weierstrass). *Si f es una función entera y si $\{a_n\}$ son los ceros no nulos de f repetidos de acuerdo a su multiplicidad; supongamos que tiene un cero de orden $m \geq 1$ en $z = 0$ (un cero de orden $m = 0$ en $z = 0$ satisface que $f(0) \neq 0$), entonces existe una función g entera y una secuencia de enteros $\{p_n\}$ tal que*

$$f(z) = z^m \exp g(z) \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

Demostración. Por el teorema anterior podemos elegir una suseción $(p_n) \subseteq \mathbb{Z}$ tal que

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \tag{1.4}$$

tenga los mismos ceros que $f(z)$ con los mismos ordenes, entonces $\frac{f(z)}{g(z)}$ sería una función anlítica en $\mathbb{C}$ que nunca se anula y como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, por la proposición 1.11 existe una funcion anlítica $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\frac{f(z)}{h(z)} = \exp g(z)$$

es decir, $f(z) = h(z) \exp g(z)$ y por (1.4) tenemos finalmente

$$f(z) = z^m \exp g(z) \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

■

El siguiente teorema responde el problema planteado en el primer comentario

Teorema 1.8. *Sea G una región, $\{a_j\}$ una sucesión de puntos distintos en G sin puntos límites en G, $\{m_j\}$ una sucesión de enteros, entonces existe una función analítica f definida en G tal que sus únicos ceros son lo puntos a_j, además a_j es un cero de multiplicacidad m_j.*

Demostración. Ver [1], página 170. ■

Capítulo 2

Teorema de Factorización de Hadamard

2.1. Resultados Previos

En esta sección probaremos algunos resultados previos para usarlos posteriormente.

Lema 2.1. *Si* $|b| < 1$*, entonces el mapeo*

$$\phi_b(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$$

lleva el disco $D(0, 1)$ *en si mismo y su frontera en si misma.*

Demostración. Restando

$$|1 - \bar{b}z|^2 = 1 + |\bar{b}z|^2 - 2\text{Re}(b\bar{z})$$

y

$$|z - b|^2 = |z|^2 + |b|^2 - 2\text{Re}(b\bar{z})$$

tendremos

$$|1 - \bar{b}z|^2 - |z - b|^2 = 1 + |b|^2|z|^2 - |z|^2 - |b|^2 = (1 - |b|^2)(1 - |z|^2)$$

luego si: $|z| < 1$ y $|b| < 1$ entonces

$$|1 - \bar{b}z|^2 - |z - b|^2 = (1 - |b|^2)(1 - |z|^2) > 0$$

de lo anterior tendremos

$$\left| \frac{z - b}{1 - \bar{b}z} \right| < 1$$

es decir

$$\varphi_b(D(0,1)) \subset D(0,1) \tag{2.1}$$

por otro lado definiendo

$$\varphi_{-b}(z) = \frac{z + b}{1 + \bar{b}z}$$

tendremos

$$\varphi_{-b}(\varphi_b(z)) = \varphi_b(\varphi_{-b}(z)) = z$$

y también

$$\varphi_{-b}(D(0,1)) \subset D(0,1)$$

luego

$$\varphi_b(\varphi_{-b}(D(0,1))) \subset \varphi_b(D(0,1))$$

es decir

$$D(0,1) \subset \varphi_b(D(0,1)) \tag{2.2}$$

de (2.1) y (2.2)

$$\varphi_b(D(0,1)) = D(0,1)$$

es decir φ_b lleva el disco $D(0,1)$ en si mismo.

Veamos la frontera. Como

$$|\varphi_b(e^{i\theta})| = \left| \frac{e^{i\theta} - b}{e^{i\theta}e^{-i\theta} - \bar{b}e^{i\theta}} \right| = \left| \frac{e^{i\theta} - b}{e^{-i\theta} - \bar{b}} \right| = 1$$

entonces

$$\varphi_b(\partial(D(0,1))) \subset \partial(D(0,1))$$

y la otra inclusión se prueba con φ_{-b} por lo tanto

$$\varphi_b(\partial(D(0,1))) = \partial(D(0,1))$$

es decir, φ_b lleva la frontera del disco $D(0,1)$ en si misma. ∎

Lema 2.2. *Si $|a| < r$, entonces el mapeo*

$$\phi_a = \frac{r^2(z-a)}{r^2 - \overline{a}z}$$

lleva el $D(0,r)$ en si mismo y su frontera en si misma.

Demostración. Si $|a| < r$ y $|z| < r$ entonces $\left|\frac{a}{r}\right| < 1$ y $\left|\frac{z}{r}\right| < 1$ y por el lema anterior

$$\left|\frac{\frac{z}{r} - \frac{a}{r}}{1 - \frac{\overline{a}z}{r^2}}\right| < 1$$

entonces

$$\left|\frac{r(z-a)}{r^2 - \overline{a}z}\right| < 1,$$

es decir

$$\left|\frac{r^2(z-a)}{r^2 - \overline{a}z}\right| < r,$$

por lo tanto

$$\phi_a(D(0,r)) \subset D(0,r) \tag{2.3}$$

definiendo ϕ_{-a}, análogamente se prueba

$$\phi_{-a}(D(0,r)) \subset D(0,r),$$

es decir

$$D(0,r) \subset \phi_a(D(0,r)) \tag{2.4}$$

de (2.3) y (2.4)

$$\phi_a(D(0,r)) = D(0,r)$$

Veamos la frontera. Como

$$|\phi_a(re^{i\theta})| = \left|\frac{r^2(re^{i\theta} - a)}{r^2 - \overline{a}re^{i\theta}}\right| = \left|\frac{r(re^{i\theta} - ae^{i\theta}e^{-i\theta})}{r - \overline{a}e^{i\theta}}\right| = r$$

entonces

$$\phi_a(\partial(D(0,r))) \subset \partial(D(0,r))$$

y la otra inclusión se prueba con ϕ_{-a}, por lo tanto

$$\phi_a(\partial(D(0,r))) = \partial(D(0,r)) \qquad \blacksquare$$

Definición 2.1. Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ diremos que $u : G \to \mathbb{R}$ es una función armónica si u tiene segundas derivadas parciales continuas y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Proposición 2.1. *Si f es analítica en un conjunto abierto G y $f = u + iv$, entonces u y v son armónicas en G.*

Demostración. Ver [4], página 86. $\blacksquare$

Teorema 2.1 (**Teorema del Valor Medio**). *Sea $G \subset \mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{R}$ una función armónica, $\overline{D}(a, R) \subset G$ y si γ es el círculo $|z - a| = r$, entonces*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta$$

Demostración. Ver [1], página 253. $\blacksquare$

Proposición 2.2. *Si f es analítica en un abierto G tal que $\overline{D(0,r)} \subset G$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(0,r)$, entonces el $\log|f|$ es armónica en G y por lo tanto verifica la propiedad del valor medio, es decir*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right|\mathrm{d}\,\theta$$

Demostración. Como $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(0,r)$ y f es analítica, entonces $\log f(z)$ es analítica y por la proposición 2.1 su parte real $\log|f(z)|$ es armónica, finalmente por el teorema 2.1 verifica la propiedad del valor medio. $\blacksquare$

Proposición 2.3. *Si* $u : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ *es una función continua y armónica en* $D(0,1)$ *entonces*

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_r(\theta - t)u(e^{it})\,\mathrm{d}\,t$$

con $0 < r < 1$ *y para todo* θ*, donde*

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta} \text{ (Núcleo de Poisson)}$$

Además $u = \mathrm{Re}(f)$ *donde* f *es la siguiente función analítica*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}u(e^{it})\,\mathrm{d}\,t$$

Demostración. Ver [1], página 259. ■

La siguiente proposición generaliza el resultado anterior a un disco arbitrario.

Proposición 2.4. *Si* $u : \overline{D}(a,R) \to \mathbb{R}$ *es una función continua y armónica en* $D(a,R)$*, entonces*

$$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{Re^{it}+re^{it}}{Re^{it}-re^{it}}\right) u(a + Re^{i\theta}), \text{ para todo } 0 < r < R.$$

Demostración. Ver [3], página 345 y [1], página 260. ■

Proposición 2.5. *Sea* f *una función analítica en el disco* $|z| \leq R$ *y sea* M *el máximo de* $\mathrm{Re}(f(z))$ *en la circunferencia* $|z| = R$*. Supongamos que* $f(0) = 0$*, entonces si* $0 < |z| < R$ *se cumple*

$$|f(z)| \leq \frac{2M|z|}{R - |z|}$$

Demostración. Consideremos la función

$$F(z) = \frac{f(z)}{z(2M - f(z))}$$

bien definida y analítica en el disco $|z| \leq R$; si $|z| = R$ se cumple

$$|2M - \mathrm{Re}(f(z))| \geq M \geq \mathrm{Re}(f(z))$$

luego si $f(z) \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} |F(z)| &= \frac{|f(z)|}{|z|\sqrt{(2M - \mathrm{Re}(f(z))^2 + (\mathrm{Im}(f(z))^2}} \\ &\leq \frac{|f(z)|}{|z|\sqrt{(\mathrm{Re}(f(z))^2 + (\mathrm{Im}(f(z))^2}} \\ &= \frac{1}{R} \end{aligned}$$

además si $f(z) = 0$. La desigualdad anterior se sigue cumpliendo.

Por el principio del módulo máximo (teorema 1.2) $|f(z)| \leq 1/R$ para todo z tal que $|z| \leq R$. Ahora expresemos f en función de F.

$$f(z) = \frac{2MzF(z)}{1 + zF(z)} \tag{2.5}$$

Considerando $0 < |z| < R$, como $|F(z)| \leq 1/R$, entonces

$$R - |z| \leq R - |z||f(z)|R \leq |R - Rzf(z)|$$

y tomando módulo en (2.5)

$$|f(z)| = \left|\frac{2MzF(z)}{1 + zF(z)}\right| \leq \frac{2M|z|}{|R + RzF(z)|} \leq \frac{2M|z|}{R - |z|}$$

es decir

$$|f(z)| \leq \frac{2M|z|}{R - |z|} \qquad \blacksquare$$

Proposición 2.6. *Si f es una función analítica en una región G y supongamos que f no es idénticamente nula. Si $G_0 = G - \{z : f(z) = 0\}$ y definamos $h : G_0 \to \mathbb{R}$ por $h(z) = \log|f(z)|$ entonces*

$$\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{f'}{f}$$

sobre G_0, es decir

$$2\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{f'}{f}$$

Demostración. Como $h(z) = \log |f(z)|$ entonces

$$e^{2h(z)} = |f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)},$$

si $f = u + iv$ tendremos $e^{2h(z)} = u^2 + v^2$ y derivando esta última ecuación

$$\frac{\partial h}{\partial x} e^{2h} = u_x u + v_x v \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} e^{2h} = u_y u + v_y v \tag{2.7}$$

De (2.6) y (2.7)

$$e^{2h} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial y} \right) = u_x u + v_x v - i u_y u - i v_y v$$

y usando las ecuaciones de Cauchy-Riemman

$$\begin{aligned} f(z)\overline{f(z)} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= u_x u + v_x v - i v_x u - i u_x v \\ &= (u_x + i v_x) u - v (u_x + i v_x) i \\ &= (u_x + i v_x)(u - iv) \\ &= f' \overline{f} \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial h}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{f'}{f}$$

pero como

$$2 \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial y},$$

finalmente

$$2 \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{f'}{f}.$$

■

2.2. Introducción

Una función entera es una función definida y analítica en todo el plano complejo. Si f es una función entera entonces tiene una expansión en series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

con radio de convergencia infinito.

A la luz de este resultado surge la siguiente pregunta ¿Puede la teoría de polinomios ser generalizada a las funciones enteras?. Por ejemplo ¿Una función entera puede ser factorizada? veremos esto más adelante.

El teorema de factorización de Weierstrass para funciones enteras dice que si f es una función entera con un cero de multiplicidad $m \geq 1$ en $z = 0$, si $\{a_n\}$ son los ceros de f no nulos ordenados de la siguente manera

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$$

tal que un cero de multiplicidad k se repita k veces, también asumiremos que

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$$

Por otro lado si $\{p_n\}$ es una secuencia de enteros tal que para todo $r > 0$ tenemos que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < \infty \tag{2.8}$$

entonces

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \tag{2.9}$$

converge uniformemente sobre subconjuntos compactos del plano, donde

$$E_p(z) = (1 - z) \exp \left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p} \right) \text{ para } p \geq 1 \text{ y } E_0(z) = 1 - z \tag{2.10}$$

consecuentemente

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z) \tag{2.11}$$

donde g es una función entera, esto nos da una idea de factorización pero no es explícita en cuanto a sus factores, el teorema de factorización de Hadamard intenta resolver este problema. Surgen las siguientes interrogantes: ¿Qué propiedades de f pueden ser deducidas si g y P tienen ciertas propiedades adecuadas?
¿Se puede imponer propiedades a f las cuales impliquen que g y P tengan propiedades particulares?
El plan que adoptaremos para responder estas preguntas es asumir que g y P tienen ciertas características para implicar propiedades sobre f para después probar la inversa.
La primera restricción sobre g en este proceso es suponer que sea un polinomio, esto condicionará el crecimiento de $e^{g(z)}$.
Una restricción conveniente para P es que todos los enteros p_n sean iguales. De la condición (2.8), vemos que esto es asumir que existe un entero $p \geq 1$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-p} < \infty$$

es decir esta es una condición sobre el grado de crecimiento de los ceros de f.
En la sección que sigue deduciremos la fórmula de Jensen, esta dice que hay una relación entre el grado de crecimiento de los ceros de f y el crecimiento de

$$M_f(r) = \sup\left\{|f(re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

con r incrementándose. En las secciones siguientes estudiaremos el grado de crecimiento de los ceros de f y el crecimiento de M_f.
Finalmente terminaremos con el teorema de factorización de Hadamard el cual muestra una íntima relación entre el grado de crecimiento de $M_f(r)$ y las restricciones entre g y P.

2.3. Fórmula de Jensen

Teorema 2.2 (Teorema de Jensen). *Sea f una función analítica sobre una región que contiene a $\overline{D}(0,r)$ y supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los ceros de f en $D(0,r)$ repetidos de acuerdos a su multiplicidad. Si $f(0) \neq 0$, entonces*

$$\log|f(0)| = -\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{r}{|a_k|}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| \mathrm{d}\,\theta$$

Demostración. Por el lema 2.2 si $|a_k| < r$ con $1 \leq k \leq n$ la función

$$\frac{r^2(z-a_k)}{r^2 - \overline{a_k}z}$$

lleva el disco $D(0,r)$ en si mismo y el borde en si mismo, definimos

$$F(z) = f(z)\prod_{k=1}^{n} \frac{r^2 - \overline{a_k}z}{r(z-a_k)}$$

la cual es una función analítica en la región que contiene a $\overline{D}(0,r)$ además por la proposición 1.9 no tiene ceros en $D(0,r)$ y por la proposición 2.2 se verifica la propiedad del valor medio, es decir.

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F(re^{i\theta})\right| \mathrm{d}\,\theta \tag{2.12}$$

Además. Si $|z| = r$, entonces $|F(z)| = |f(z)|$, en efecto:
Si $|z| = r$ por el lema 2.2

$$\left|\frac{r^2(z-a_k)}{r^2 - \overline{a_k}z}\right| = r$$

entonces

$$\left|\frac{r^2 - \overline{a_k}z)}{r(z-a_k)}\right| = 1$$

para todo $1 \leq k \leq n$. Por lo tanto

$$|F(z)| = |f(z)|\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{r^2 - \overline{a_k}z)}{r(z-a_k)}\right| = |f(z)|$$

es decir $|F(z)| = |f(z)|$.

Además, como
$$F(0) = f(0)\prod_{k=1}^{n}\left(-\frac{r}{a_k}\right)$$
entonces de (2.12)
$$\log|f(0)|\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{r}{a_k}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|\mathrm{d}\,\theta$$
Finalmente
$$\log|f(0)| = -\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{r}{|a_k|}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|\mathrm{d}\,\theta \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.3 (**Teorema de Poisson-Jensen**). *Si f es analítica en una región la cual contiene $\overline{D}(0,r)$ y si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los ceros de f en $D(0,r)$ repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Si $|z| < r$ y $f(z) \neq 0$, entonces*
$$\log|f(z)| = -\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{r^2-\overline{a_k}z}{r(z-a_k)}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\right)\log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\,\theta$$

Demostración. Como en el teorema de Jensen definimos
$$F(z) = f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2-\overline{a_k}z}{r(z-a_k)}$$
que es una función analítica en la región que contiene a $\overline{D}(0,r)$, por la proposición 2.2 $\log|F|$ es armónica en G y por la proposición 2.4 si $|z| < r$
$$\log|F(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\right)\log|F(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\,\theta$$
es decir
$$\log|f(z)| = -\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{r^2-\overline{a_k}z}{r(z-a_k)}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\right)\log|F(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\,\theta$$
Por otro lado sabemos que si $|z| = r$, entonces $|F(z)| = |f(z)|$, finalmente para todo z tal que $|z| < r$ y $f(z) \neq 0$ tendremos que
$$\log|f(z)| = -\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{r^2-\overline{a_k}z}{r(z-a_k)}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\right)\log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\,\theta \qquad \blacksquare$$

2.4. Género y Orden de una Función Entera

Definición 2.2. Si f es una función entera con ceros $\{a_1, a_2, \ldots\}$ repetidos de acuerdo a su multiplicidad y arreglados tal que

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \ldots$$

entonces diremos que f es de rango finito si existe un número entero $p \geq 1$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-(p+1)} < \infty \tag{2.13}$$

Si p es el menor entero tal que esto ocurre, se dice que f tiene rango p.

Observaciones .

a) Una función con un número finito de ceros tiene rango cero.

b) Una función es de rango infinito si no tiene rango finito.

c) Si f tiene rango finito, de la ecuación (2.8) tomando $p_n = p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ como

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-(p+1)} < \infty$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p+1} < \infty$$

para todo $r > 0$ y en (2.9) podemos tomar

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p \left(\frac{z}{a_n} \right) \tag{2.14}$$

d) Notemos que si f tiene rango finito y p es cualquier entero mayor que el rango de f, entonces (2.8) permanece válido y existirá otro $P(z)$ en (2.9) y por tanto la factorización (2.11) de f no sería única. Sin embargo si el producto P es definido por (2.14) donde p es el rango de f entonces la fatorización (2.11) es única excepto si tomamos g como $g + 2n\pi i$ con $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.3. Si f es una función entera con rango p con ceros $\{a_1, a_2, \ldots\}$, entonces el producto definido en (2.14) es llamado la FORMA ESTÁNDAR PARA f. Si f es sobreentendida entonces se dirá que es la FORMA ESTÁNDAR.

Definición 2.4. Una función entera f tiene GÉNERO FINITO si tiene rango finito y si

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z)$$

Donde P es la forma estándar y g es un polinomio. Si p es el rango de f y q es el grado del polinomio, entonces $u = \max\{p, q\}$ es llamado el GÉNERO DE f.

Observación . El género de f esta bien definido porque P está en su forma estándar y g es únicamente determinado añadiendo un múltiplo $2\pi i$, en particular el grado de g es determinado.

Lema 2.3. *Si $E_u(z)$ está definida como en (2.10), entonces existe $M > 0$ tal que*

$$\log |E_u(z)| \leq M|z|^{u+1}, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Demostración.

__**Afirmación**__: Si $|z| < 1/2$, entonces $\log |E_u(z)| \leq 2|z|^{u+1}$; en efecto.

$$\begin{aligned}
\log |E_u(z)| &= \log \left\{ |1-z| \exp\left(\mathrm{Re}\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^u}{u} \right)\right)\right\} \\
&= \log |1-z| + \mathrm{Re}\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^u}{u} \right) \\
&= \mathrm{Re}(\log(1-z)) + \mathrm{Re}\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^u}{u} \right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^u}{u} \right), \text{ por (1.1)} \\
&= \mathrm{Re}\left(-\frac{z^{u+1}}{u+1} - \frac{z^{u+2}}{u+2} - \ldots \right) \\
&\leq |z|^{u+1} \left(\frac{1}{u+1} + \frac{|z|}{u+2} + \frac{|z|^2}{u+3} + \ldots \right) \\
&\leq |z|^{u+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots \right), \text{ pues } |z| < \frac{1}{2} \\
&= 2|z|^{u+1}
\end{aligned}$$

es decir si $|z| < 1/2$, se cumple $\log |E_u(z)| \leq 2|z|^{u+1}$.

Afirmación: Fijando $A > 0$, existe $R > 0$ tal que si $|z| > R$, entonces

$$\log |E_u(z)| \leq A|z|^{u+1};$$

en efecto.

Como

$$\begin{aligned} |E_u(z)| &= |1-z| \exp\left(\operatorname{Re}\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^u}{u}\right)\right) \\ &\leq (1+|z|) \exp\left(\operatorname{Re}\left(|z| + \frac{|z|^2}{2} + \ldots + \frac{|z|^u}{u}\right)\right), \end{aligned}$$

entonces

$$\log |E_u(z)| \leq \log(1+|z|) + |z| + \frac{|z|^2}{2} + \ldots + \frac{|z|^u}{u}.$$

En esta última desigualdad dividiendo entre $|z|^{u+1}$ y haciendo $z \to \infty$, tendremos

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\log |E_u(z)|}{|z|^{u+1}} = 0 \tag{2.15}$$

por tanto si $A > 0$, existe $R > 0$ tal que si $|z| > R$

$$\log |E_u(z)| \leq A|z|^{u+1}$$

Así la afirmación queda probada.

Además en $\{z : 1/2 \leq |z| \leq R\}$ por (2.15) existe $B > 0$ tal que

$$\log |E_u(z)| \leq B|z|^{u+1}. \tag{2.16}$$

Finalmente de las afirmaciones anteriores y (2.16) tomando $M = \max\{2, A, B\}$ tendremos

$$\log |E_u(z)| \leq M|z|^{u+1}, \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.4. *Si f es una función entera de género u, para todo número positivo α existe un número r_0 tal que para $|z| > r_0$*

$$|f(z)| < \exp(\alpha|z|^{u+1})$$

Demostración. Por el lema anterior existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\log|E_u(z)| \leq M|z|^{u+1}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-(u+1)} < +\infty$$

su resto tiende a cero, escogemos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^{-(u+1)} < \frac{\alpha}{4M}, \ \alpha \text{ real positivo}$$

por lo tanto para todo z complejo se cumple

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \log\left|E_u\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq M \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{u+1} < \frac{\alpha}{4}|z|^{u+1},$$

es decir

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \log\left|E_u\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| < \frac{\alpha}{4}|z|^{u+1}. \tag{2.17}$$

Por otro lado por la segunda afirmación del lema anterior existirá $r_1 > 0$ tal que

$$\log|E_u(z)| \leq \frac{\alpha}{4N}|a_1|^{u+1}|z|^{u+1}, \text{ para } |z| > r_1.$$

Si $r_2 = \max\{|a_1|r_1, |a_2|r_1, \ldots, |a_n|r_1\}$, entonces para $|z| > r_2$ tendremos $|z/a_n| < r_1$ para todo n entre 1 y N, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \log\left|E_u\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| &\leq \frac{\alpha}{4N}|a_1|^{u+1} \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{u+1} \\
&\leq \frac{\alpha}{4N}|a_1|^{u+1}|z|^{u+1} \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{1}{a_n}\right|^{u+1} \\
&\leq \frac{\alpha}{4N}|a_1|^{u+1}|z|^{u+1} \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{1}{a_1}\right|^{u+1} \\
&\leq \frac{\alpha}{4}|z|^{u+1}
\end{aligned}$$

es decir, para $|z| > r_2$

$$\sum_{n=1}^{N} \log\left|E_u\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \frac{\alpha}{4}|z|^{u+1} \tag{2.18}$$

luego combinando (2.17) y (2.18), para $|z| > r_2$

$$\log|P(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left|E_u\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| < \frac{\alpha}{2}|z|^{u+1}. \tag{2.19}$$

Por otro lado de la hipótesis f es una función de género u, es decir

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_u\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

donde g es un polinomio de grado menor igual a u, entonces

$$\lim_{z\to\infty} \frac{m\log|z| + |g(z)|}{|z|^{u+1}} = 0.$$

por lo tanto existe $r_3 > 0$ tal que para todo $|z| > r_3$

$$m\log|z| + |g(z)| \leq \frac{\alpha}{2}|z|^{u+1}. \tag{2.20}$$

Finalmente sumando (2.19) con (2.20) y tomando $r_0 = \max\{r_3, r_2\}$

$$\log|P(z)| + m\log|z| + |g(z)| < \alpha|z|^{u+1},$$

es decir

$$\log|P(z)| + m\log|z| + \log e^{|g(z)|} < \alpha|z|^{u+1},$$

de aquí

$$\log|f(z)| < \alpha|z|^{u+1}, \text{ para } z \text{ tal que } |z| > r_0.$$

Por lo tanto

$$|f(z)| < \exp(\alpha|z|^{u+1}), \text{ para } z \text{ tal que } |z| > r_0 \qquad \blacksquare$$

Comentario .

El teorema anterio dice que limitando la tasa de crecimiento de los ceros de una función entera

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z)$$

y al exigir que g sea un polinimio entonces el

$$\max\{|f(re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

con r suficientemente grande es dominada por

$$\exp(\alpha|z|^{u+1})$$

para algún u y para todo $\alpha > 0$. Queremos probar la inversa de este resultado. Sucede que la factorización de Weierstrass de una función entera está relacionada con su comportamiento asintótico, es decir, con la velocidad con que crece el módulo cuando z tiende a infinito. Considerando el teorema anterior introducimos el siguiente concepto.

Definición 2.5. Sea f una función entera. Para cada $r > 0$ definimos

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$$

Diremos que una función entera es de *orden finito* si existe $c > 0$ y $r_0 > 0$ tal que $M_f(r) < e^{r^c}$ para todo $r > r_0$, en tal caso se llama *orden de crecimiento* de f al ínfimo λ de los números que cumplen con la condición anterior.
Si no es de orden finito diremos que es de *orden infinito* y convendremos en que su orden de crecimiento es $\lambda = +\infty$.
Es importante notar que el orden de crecimiento λ de una función entera de orden finito no tiene porque ser uno de los números c que cumplen la condición anterior.

Teorema 2.5. *Si f es una función entera de orden λ, entonces*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} = \lambda$$

Demostración. Como f es una función entera de orden $\lambda < +\infty$.Dado $\epsilon > 0$ existe $r_0 > 0$ tal que para todo $r > r_0$

$$M_f(r) < e^{r^{\lambda+\epsilon}} \tag{2.21}$$

también existe $\{r_n\}$ sucesión de positivos convergentes a $+\infty$ tal que

$$M_f(r_n) \geq e^{r_n^{\lambda-\epsilon}} \tag{2.22}$$

tomando logaritmo en (2.21) y (2.22) tendremos

$$\frac{\log\log M_f(r)}{\log r} < \lambda + \epsilon \quad \text{y} \quad \frac{\log\log M_f(r_n)}{\log r_n} \geq \lambda - \epsilon.$$

Entonces dado $\epsilon > 0$ para r suficientemente grande se cumple

$$\lambda - \epsilon \leq \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} \leq \lambda + \epsilon.$$

Finalmente

$$\lambda - \epsilon \leq \operatorname*{lím\,sup}_{r\to\infty} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} \leq \lambda + \epsilon$$

$$\operatorname*{lím\,sup}_{r\to\infty} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} = \lambda$$ ■

Ejemplos .

1. Hallaremos el orden de la función $f(z) = \exp(e^z)$, en efecto.

   Veamos si $z = re^{i\theta}$, entonces

   $$|f(z)| = \exp(\mathrm{Re}(e^z)) = \exp(e^r \cos\theta),$$

   por lo tanto $M_f(r) = \exp(e^r)$ y

   $$\frac{\log\log M_f(r)}{\log r} = \frac{r}{\log r}$$

   de aquí

   $$\operatorname*{lím\,sup}_{r\to\infty} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} = +\infty,$$

   es decir el orden de f es infinito.

2. Hallaremos el orden de la función $g(z) = \exp(z^n)$ con $n \geq 1$, en efecto.

   Veamos si $z = re^{i\theta}$, entonces

   $$|g(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z^n)) = \exp(r^n \cos n\theta),$$

   por lo tanto $M_g(r) = \exp(r^n)$ y

   $$\frac{\log\log M_g(r)}{\log r} = \frac{n\log r}{\log r} = n$$

de aquí

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M_g(r)}{\log r} = n,$$

por lo tanto el orden de g es n.

Usando esta terminología el teorema 2.4 puede escribirse de la siguiente manera.

Corolario 2.1. *Si f es una función entera de género u entonces f es de orden finito $\lambda \leq u+1$.*

Proposición 2.7. *Si $P(z)$ es un polinomio de grado n, entonces la función $f(z) = e^{P(z)}$ tiene orden n.*

Demostración. Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ con $a_n \neq 0$ y sean $a_k = \sigma_k e^{ia_k}$, $z = re^{i\theta}$, entonces

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| e^{\sum_{k=1}^n \sigma_k r^k e^{i(a_k+k\theta)}} \right| \\ &= e^{\sum_{k=1}^n \sigma_k r^k \cos(a_k+k\theta)} \end{aligned}$$

el exponente puede expresarse de la forma

$$\sigma_n r^n \left(\cos(a_n + n\theta) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sigma_k \cos(a_k + k\theta)}{a_n r^{n-k}} \right). \tag{2.23}$$

La última suma tiende a cero uniformemente en θ cuando r tiende $+\infty$, por lo que, dado $\epsilon > 0$ esta queda mayorada por $1+\epsilon$, por lo tanto para r suficientemente grande (2.23) queda mayorada por $\sigma_n r^n(1+\epsilon)$. Por otra parte, si $\theta = -a_n/n$ tenemos que $\cos(a_n + n\theta) = 1$ y (2.23) es mayor que $\sigma_n r^n(1-\epsilon)$. Esto prueba que

$$e^{\sigma_n r^n(1-\epsilon)} \leq M_f(r) \leq e^{\sigma_n r^n(1+\epsilon)}$$

$$\sigma_n r^n(1-\epsilon) \leq \log M_f(r) \leq \sigma_n r^n(1+\epsilon)$$

$$\frac{\log \sigma_n(1-\epsilon) + \log r^n}{\log r} \leq \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} \leq \frac{\log \sigma_n(1+\epsilon) + \log r^n}{\log r}.$$

$$\log_r e^{\sigma_n(1-\epsilon)} + n \leq \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} \leq \log_r e^{\sigma_n(1+\epsilon)} + n.$$

Haciendo $r \to \infty$,

$$\frac{\log \log M_f(r)}{\log r} \to n$$

por lo tanto el orden de f es n. ■

Proposición 2.8. *Si f es una función de orden λ, entonces αf tiene orden menor igual que λ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Como f tiene orden λ, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $r > r_0$ tal que para todo $r > r_0$ se tiene $\log M_f(r) \leq r^{\lambda+\epsilon}$. Como

$$M_{\alpha f}(r) = \text{máx}\{|(\alpha f)(z) : |z| = r\} = |\alpha| M_f(r),$$

entonces para todo $r > r_0$

$$\log |M_{\alpha f}(r)| = \log |\alpha| + \log |M_f(r)| \leq \log |\alpha| + r^{\lambda+\epsilon}. \tag{2.24}$$

Por otro lado tomando r suficientemente grande tal que

$$r^{\lambda+\epsilon} > 1 \text{ y } r^{\epsilon} - 1 > \log |\alpha|,$$

entonces

$$\log |\alpha| \leq r^{\lambda+\epsilon}(r^{\epsilon} - 1)$$

de aquí

$$\log |\alpha| + r^{\lambda+\epsilon} \leq r^{\lambda+2\epsilon}$$

y por (2.24) tenemos para r suficientemente grande

$$\log |M_{\alpha f}(r)| \leq r^{\lambda+2\epsilon}.$$

Por lo tanto αf tiene orden menor igual que λ. ■

Proposición 2.9. *Si f es una función entera, $n(r)$ es el número de ceros de f en $D(0, r)$ contando multiplicidad además $f(0) = 1$, entonces*

$$n(r) \log 2 \leq \log M_f(2r).$$

Demostración. Por la fórmula de Jensen

$$\log|f(0)| = -\sum_{k=1}^{n(2r)} \log\left(\frac{2r}{|a_k|}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(2re^{i\theta})\right| \mathrm{d}\,\theta$$

de aquí

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n(2r)} \log\left(\frac{2r}{|a_k|}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(2re^{i\theta})\right| \mathrm{d}\,\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log M_f(2r)\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= \log M_f(2r) \end{aligned}$$

Tomando los ceros a_k de f que están en $D(0,r)$ tendremos $|a_k| \leq r$, es decir $2 < 2r/|a_k|$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n(r)} \log 2 &< \sum_{k=1}^{n(r)} \log\left(\frac{2r}{|a_k|}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n(2r)} \log\left(\frac{2r}{|a_k|}\right) \\ &\leq \log M_f(2r) \end{aligned}$$

y tomando extremos

$$n(r)\log 2 \leq \log M_f(2r) \qquad \blacksquare$$

Proposición 2.10. *Si f es una función entera no constante tal que $f(z) \neq 0$ y para todo $|z| < r$*

$$\log|f(z)| = -\sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{r^2 - \overline{a_k}z}{r(z-a_k)}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\right) \log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\,\theta$$

Donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los ceros de f en $D(0,r)$ repetidos de acuerdo a su multiplicidad, entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-1} + \sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}(r^2-\overline{a_k}z)^{-1} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2re^{i\theta}(re^{i\theta}-z)^{-2}\log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\,\theta$$

Demostración. Observemos que la hipótesis de la proposición es factible por el teorema de Poisson-Jensen. Llamando

$$\begin{aligned}
h_{1k} &= \log |r^2 - \overline{a_k} z|, \\
h_{2k} &= \log |r(z - a_k)|, \\
h_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \right) \log |f(re^{i\theta})| \, \mathrm{d}\,\theta, \\
f_{1k} &= r^2 - \overline{a_k} z, \\
f_{2k} &= r(z - a_k)
\end{aligned}$$

por la proposición 2.6

$$\frac{f'}{f} = -\sum_{k=1}^{n} 2\frac{\partial h_{1k}}{\partial z} + \sum_{k=1}^{n} 2\frac{\partial h_{2k}}{\partial z} + 2\frac{\partial h_3}{\partial z}. \tag{2.25}$$

También por la proposición 2.6

$$2\frac{\partial h_{1k}}{\partial z} = \frac{f'_{1k}}{f_{1k}} = \frac{-\overline{a_k}}{r^2 - \overline{a_k} z} = -\overline{a_k}(r^2 - \overline{a_k} z)^{-1}. \tag{2.26}$$

$$2\frac{\partial h_{2k}}{\partial z} = \frac{f'_{2k}}{f_{2k}} = \frac{1}{z - a_k} = (z - a_k)^{-1} \tag{2.27}$$

Además como

$$h_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \right) \log |f(re^{i\theta})| \, \mathrm{d}\,\theta$$

por la regla de Leibniz, ver el teorema 1.1

$$2\frac{\partial h_3}{\partial z} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2re^{i\theta}(re^{i\theta} - z)^{-2} \log |f(re^{i\theta})| \, \mathrm{d}\,\theta. \tag{2.28}$$

Finalmente reemplazando (2.26), (2.27) y (2.28) en (2.25) se tiene el resultado.

■

2.5. El Teorema de Factorización de Hadamard

En esta sección se prueba la inversa del corolario 2.1, es decir, se prueba que toda función de orden finito tiene género finito.

Desde que una función de género finito puede ser factorizada, esto nos da un teorema de factorización con condiciones más explícitas que en el teorema de factorización de Weierstrass.

Lema 2.4. *Sea f una función entera no constante de orden λ con $f(0) = 1$ y sean $\{a_1, a_2, \ldots\}$ los ceros de f contando multiplicidad y ordenados tal que*

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \ldots$$

si p es un número entero tal que $p > \lambda - 1$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\, z^p}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -p! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n - z)^{p+1}}$$

para $z \neq a_1, a_2, \ldots$

Demostración. Sea $n(r) = n$ el número de ceros de f en $D(0, r)$, de acuerdo al teorema de Poisson-Jensen

$$\log|f(z)| = -\sum_{k=1}^{n} \log\left|\frac{r^2 - \overline{a_k} z}{r(z - a_k)}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z}\right) \log|f(re^{i\theta})| \,\mathrm{d}\,\theta$$

Para todo $|z| < r$ y $f(z) \neq 0$. Usando la proposición 2.10

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n}(z - a_k)^{-1} + \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(r^2 - \overline{a_k} z)^{-1} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2re^{i\theta}(re^{i\theta} - z)^{-2} \log|f(re^{i\theta})| \,\mathrm{d}\,\theta$$

Para $|z| < r$ y $z \neq a_1, a_2, \ldots$ diferenciando p veces tendremos

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\, z^p}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -p! \sum_{k=1}^{n}(a_k - z)^{-p-1} + p! \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}^{p+1}(r^2 - \overline{a_k} z)^{-p-1}$$

$$+ (p+1)!\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2re^{i\theta}(re^{i\theta} - z)^{-p-2} \log|f(re^{i\theta})| \,\mathrm{d}\,\theta \qquad (2.29)$$

Como $n(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$ el resultado se sigue si demostramos que los dos últimos sumandos tienden a cero cuando $r \to \infty$.

Para ver que el segundo sumando en (2.29) tiende a cero tomamos $r > 2|z|$. Como $|a_k| < r$, entonces

$$|r^2 - \overline{a_k} z| \geq r^2 - |\overline{a_k}||z| \geq r^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}$$

es decir

$$|r^2 - \overline{a_k} z|^{-1} \leq \frac{2}{r^2},$$

de aquí

$$\left(|\overline{a_k}||r^2 - \overline{a_k} z|^{-1}\right)^{p+1} \leq \left(\frac{2}{r}\right)^{p+1}$$

y comparando con la segunda suma en (2.29)

$$\sum_{k=1}^{n(r)} \overline{a_k}^{p+1} \left(r^2 - \overline{a_k} z\right)^{-p-1} \leq n(r) \left(\frac{2}{r}\right)^{p+1} \tag{2.30}$$

Por otro lado por la proposición 2.9

$$n(r) \log 2 \leq \log M_f(2r)$$

y como f tiene orden λ, dado $\epsilon > 0$ y r suficientemente grande

$$n(r) \log 2 (2r)^{-(p+1)} \leq \log M_f(2r)(2r)^{-(p+1)} \leq (2r)^{(\lambda+\epsilon)-(p+1)} \tag{2.31}$$

Por hipótesis $p + 1 > \lambda$, eligiendo $\epsilon > 0$ tal que $(\lambda + \epsilon) - (p + 1) < 0$ y haciendo $r \to \infty$ tendremos $(2r)^{(\lambda+\epsilon)-(p+1)} \to 0$, entonces por (2.31) $n(r)r^{-(p+1)} \to 0$, por lo tanto en (2.30)

$$\sum_{k=1}^{n(r)} \overline{a_k}^{p+1} \left(r^2 - \overline{a_k} z\right)^{-p-1} \to 0$$

Para ver que el tercer sumando en (2.29) tiende a cero tomando $r > 2|z|$, entonces

$$|re^{i\theta} - z| \geq r - |z| > \frac{r}{2}$$

de aquí

$$2r\left(\frac{2}{r}\right)^{p+2} \geq 2r\left(\frac{1}{|re^{i\theta}-z|}\right)^{p+2}$$

y se sigue que

$$2r|re^{i\theta}-z|^{-p-2} \leq 2^{p+3}r^{-(p+1)}$$

usando esta última desigualdad vemos que

$$\begin{aligned}
&\left|(p+1)!\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2re^{i\theta}(re^{i\theta}-z)^{-p-2}\log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\,\theta\right| \\
\leq\ & (p+1)!\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left|2re^{i\theta}(re^{i\theta}-z)^{-p-2}\log|f(re^{i\theta})|\right|\mathrm{d}\,\theta \\
\leq\ & (p+1)!\frac{1}{\pi}2^{p+3}r^{-(p+1)}\log M_f(r)2\pi \\
\leq\ & (p+1)!2^{p+4}r^{-(p+1)}\log M_f(r).
\end{aligned}$$

Por otro lado como f tiene orden λ, dado $\epsilon > 0$ tenemos

$$\log M_f(r) \leq r^{\lambda+\epsilon},$$

entonces para r suficientemente grande tendremos

$$(p+1)!2^{p+4}r^{-(p+1)}\log M_f(r) \leq (p+1)!2^{p+4}r^{(\lambda+\epsilon)-(p+1)}.$$

Tomando $\epsilon > 0$ tal que $(\lambda+\epsilon)-(p+1) < 0$ y haciendo $r \to \infty$, entonces

$$r^{(\lambda+\epsilon)-(p+1)} \to 0$$

por lo tanto el tercer sumando en (2.29) tiende a cero si $r \to \infty$.

Esto completa la prueba pues finalmente de (2.29) tendremos

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\,z^p}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -p!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a_n-z)^{p+1}},\ \text{para } z \neq a_1, a_2, \ldots \qquad \blacksquare$$

Note que el lema implica que f tiene infinitos ceros, sin embargo si f tiene un número finito de ceros entonces la suma en el lema permanece válida.

El siguiente resultado es el teorema de factorización de Hadamard el cual nos da una condición para que una función entera sea factorizable en el sentido del género finito.

Teorema 2.6 (**Teorema de Factorización de Hadamard**). *Si f es una función entera de orden finito λ, entonces f tiene género finito $\mu \leq \lambda$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(0) = 1$, en efecto si f tiene un cero en el origen de multiplicidad m, dado $\epsilon > 0$ y $|z| = r$ si r es suficientemente grande tal que $r^{\epsilon} - 1 > 0$, entonces

$$-m \log r \leq r^{\lambda+\epsilon}[r^{\epsilon} - 1]$$

$$-m \log r \leq r^{\lambda+2\epsilon} - r^{\lambda+\epsilon}$$

luego

$$\log |f(z)z^{-m}| \leq \log \left[M(r)r^{-m}\right] \leq r^{\lambda+\epsilon} - m \log r \leq r^{\lambda+2\epsilon}.$$

Así $f(z)z^{-m}$ es una función entera de orden finito menor igual que λ que no se anula en cero; por la proposición 2.8 la multiplicación por un escalar hace que el orden siga siendo finito y menor igual que λ, con lo que la suposición queda probada.

Sea p el entero más próximo a λ tal que $p \leq \lambda < p + 1$

<u>**Afirmación**</u>: f tiene rango finito menor igual que p.

En efecto, sean $a_1, a_2, \ldots$ los ceros de f contando multiplicidad y ordenados tal que

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \ldots$$

por probar que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-(p+1)} < \infty.$$

Sea $n(r)$ el número de ceros de f en $D(0, r)$, por la proposición 2.9

$$n(r) \log 2 \leq \log M_f(2r)$$

y como f tiene orden λ dado $\epsilon > 0$ tendremos

$$n(r) \log 2 \leq \log M_f(2r) < (2r)^{\lambda+\epsilon/2}.$$

Esto es

$$n(r)\log 2(2r)^{-(\lambda+\epsilon)} \leq (2r)^{-\epsilon/2},$$

entonces

$$\lim_{r\to\infty} n(r)r^{-(\lambda+\epsilon)} = 0$$

y de aquí para r suficientemente grande tendremos $n(r) \leq r^{\lambda+\epsilon}$.

Desde que

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$$

por la última desigualdad

$$k-1 \leq n(|a_k|) \leq |a_k|^{\lambda+\epsilon}$$

para k entero suficientemente grande, como $k-1 \leq |a_k|^{\lambda+\epsilon}$, entonces

$$(k-1)^{\frac{p+1}{\lambda+\epsilon}} \leq |a_k|^{p+1}$$

es decir

$$|a_k|^{-(p+1)} \leq (k-1)^{-\frac{p+1}{\lambda+\epsilon}} \tag{2.32}$$

(Recordando $\lambda < p+1$) tomando $\epsilon > 0$ tal que $\lambda + \epsilon < p+1$, tendremos

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)^{-\frac{p+1}{\lambda+\epsilon}} < \infty$$

y por (2.32)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-(p+1)} < +\infty.$$

Así la afirmación queda probada.

<u>**Afirmación**</u>: $f(z) = P(z)\exp(g(z))$ donde $g(z)$ es un polinomio y P es el producto canónico en su forma estándar.

En efecto, como estamos considerando $f(0) = 1$ por el teorema de factorización de Weierstrass y la observación d) de la definición 2.1

$$f(z) = P(z)\exp(g(z))$$

donde P es el producto canónico en su forma estándar y g es una función entera. Para $z \neq a_k$ tendremos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g'(z) + \frac{P'(z)}{P(z)}$$

de aquí

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\, z^p}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = g^{(p+1)}(z) + \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\, z^p}\left[\frac{P'(z)}{P(z)}\right]$$

y por el lema anterior

$$-p!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a_n - z)^{p+1}} = g^{(p+1)}(z) + \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\, z^p}\left[\frac{P'(z)}{P(z)}\right]. \tag{2.33}$$

Por otro lado

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\, z^p}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -p!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a_n - z)^{p+1}}. \tag{2.34}$$

En efecto como

$$E_p(z) = (1 - z)\exp\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{z}{i}\right)^i$$

entonces

$$E_p(\frac{z}{a_n}) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\exp\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i}\left(\frac{z}{a_n}\right)^i$$

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty}E_p(\frac{z}{a_n}) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - z}{a_n}\right)\exp\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i}\left(\frac{z}{a_n}\right)^i$$

por la proposición 1.14 podemos tomar logaritmo

$$\log P(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{a_n - z}{a_n}\right)\exp\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i}\left(\frac{z}{a_n}\right)^i$$

y derivando p veces con respesto a z

$$\begin{aligned}
\frac{P'(z)}{P(z)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{a_n}\exp\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i}\left(\frac{z}{a_n}\right)^i + \left(\frac{a_n - z}{a_n}\right)\sum_{i=1}^{p}\frac{z^{i-1}}{(a_n)^i}\exp\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i}\left(\frac{z}{a_n}\right)^i}{\left(\frac{a_n - z}{a_n}\right)\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i}\left(\frac{z}{a_n}\right)^i} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1 + (a_n - z)\sum_{i=1}^{p}\frac{z^{i-1}}{(a_n)^i}}{a_n - z} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - z)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{p}\frac{z^{i-1}}{(a_n)^i}
\end{aligned}$$

de aquí
$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\,z^p}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -p!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a_n-z)^{p+1}}.$$
Así de (2.33) y (2.34) $g^{(p+1)}(z) = 0$. Además como g es una función entera por el teorema de Taylor es un polinomio de grado menor igual que p.

Finalmente de las afirmaciones anteriores f tiene género finito además como el rango de f y el grado de g son ambos menores iguales que p, entonces si el género de f es
$$\mu = \text{máx}\{\text{rango de } f, \text{rango de } g\}$$
tendremos $\mu \leq p \leq \lambda$, así $\mu \leq \lambda$. ■

El siguiente teorema es un caso particular del Teorema de Picard.

Teorema 2.7. *Sea f una función entera de orden finito, entonces f asume cada número complejo con una posible excepción.*

Demostración. Supongamos que existen números complejos α y β con $\alpha \neq \beta$ tal que $f(z) \neq \alpha$ y $f(z) \neq \beta$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f - \alpha$ es una función entera que nuca se anula. Por tanto existe una función entera $Q(z)$ tal que
$$f(z) - \alpha = \exp Q(z)$$
(ver [1], capítulo 8 y teorema 2.2) además como el orden de f es finito, digamos ρ, entonces dado $\epsilon > 0$ para r suficientemente grande
$$M_{f-\alpha}(r) < e^{r^{\rho+\epsilon}}$$
con $\epsilon > 0$, es decir el orden de $f - \alpha$ es menor igual que ρ.

Luego dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que si $|z| = r > R$, entonces
$$|\exp Q(z)| = |f(z) - \alpha| < e^{r^{\rho+\epsilon}}$$
es decir $\mathrm{Re}(Q(z)) < |z|^{\sigma}$ con $\sigma = \rho + \epsilon$.

Considerando la función $g(z) = Q(z) - Q(0)$ tendremos $g(0) = 0$ y si $r > R$ la parte real de g sobre la circunferencia $|z| = r$ esta acotada por $r^\sigma - \mathrm{Re}(Q(0))$ y aplicando la proposición 2.5 nos da que si $|z| = r/2$ entonces

$$|g(z)| \leq 2(r^\sigma - \mathrm{Re}(P(0)))$$

Si $a_m = g^m(z)/m!$ es el coeficiente m-ésimo de la serie de Taylor de g alrededor de 0 la estimativas de Cauchy nos dan que

$$|g^m(z)| < \frac{m!2(r^\sigma - \mathrm{Re}(Q(0)))}{|r/2|^m}$$

$$\left|\frac{g^m(z)}{m!}\right| \leq \frac{2^{m+1}(r^\sigma - \mathrm{Re}(Q(0)))}{r^m}$$

$$|a_m| \leq \frac{2^{m+1}(r^\sigma - \mathrm{Re}(Q(0)))}{r^m}.$$

De aquí para r suficientemente grande y $m > \sigma$ esta última expresión tiende a cero. Así pues $a_m = 0$ para $m > \sigma$ en consecuencia g es un polinomio, así Q es un polinomio. Pero $\exp(Q(z))$ nunca asume el valor $\beta - \alpha$ esto significa que $Q(z)$ nunca asume el valor $\log(\beta - \alpha)$ contradiciendo el corolario 1.3. ■

2.6. Factorización de la Función Seno

De la demostración del teorema de factorización de Hadamard podemos deducir que si f es una función entera de orden finito λ donde $\{a_n\}$ es la sucesión de ceros no nulos (repetidos de acuerdo a su multiplicidad y ordenados de modo que la sucesión de sus módulos es no decreciente), entonces

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

donde $g(z)$ es un polinomio de grado menor igual que λ, m es la multiplicidad del cero $z = 0$ de la función f y k es el rango de la sucesión $\{a_n\}$.

Teorema 2.8. *Para todo número complejo z se cumple*

$$\operatorname{sen} z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Demostración.

Afirmación: El orden de la función $\operatorname{sen} z$ es 1, en efecto.

Consideremos $z = x+iy$, como

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x\cosh y + \cos x \operatorname{senh} y i,$$

entonces

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y\\ &= \operatorname{sen}^2 x(1+\operatorname{senh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y\\ &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y\end{aligned}$$

es decir

$$\left|\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right| = |\operatorname{senh} y| \le |\operatorname{sen} z|. \tag{2.35}$$

También

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y\\ &= \operatorname{sen}^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x(\cosh^2 y - 1)\\ &= -\cos^2 x + \cosh^2 y.\end{aligned}$$

De aquí

$$|\operatorname{sen} z|^2 + \cos^2 x = \cosh^2 y,$$

por lo tanto

$$|\operatorname{sen} z| \le |\cosh y| = \left|\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right|. \tag{2.36}$$

Luego de (2.35) y (2.36)

$$\left|\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right| \le |\operatorname{sen} z| \le \left|\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right|,$$

entonces

$$\frac{e^r - 1}{2} \leq |\operatorname{sen} z| \leq \frac{e^r + 1}{2}$$

y de aquí aplicando el teorema 2.5 el orden de la función seno es 1.

Por otro lado, como los ceros de la función $\operatorname{sen} z$ ocurren en 0 y en $\pm n\pi$; definamos

$$a_1 = \pi, a_2 = -\pi, a_3 = 2\pi, a_4 = -2\pi, \ldots$$

todos los ceros simples y como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2} < +\infty$$

converge, entonces por el teorema de factorización de Hadamard.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= e^{az+b} z \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{a_n}\right) \\
&= e^{az+b} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} \\
&= e^{az+b} z \left[\left(1 - \frac{z}{\pi}\right) e^{\frac{z}{\pi}}\right] \left[\left(1 + \frac{z}{\pi}\right) e^{-\frac{z}{\pi}}\right] \left[\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right) e^{\frac{z}{2\pi}}\right] \ldots \\
&= e^{az+b} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado como la función $\operatorname{sen} z$ es una función impar

$$e^{-az+b}(-z) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) = -e^{az+b}(z) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

es decir $e^{2az} = 1$ para todo número complejo z, entonces $a = 0$. Así tendremos

$$\operatorname{sen} z = e^b z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

De aquí dividiendo entre z y haciendo $z \to 0$, vemos que $e^b = 1$, finalmente

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \qquad \blacksquare$$

Bibliografía

[1] J. B. Conway. *'Functions of One Complex Variable'*. Second Edition. Springer-Verlag. 1978.

[2] A. Lins Nieto. *'Funções de una Variável Complexa'*. Projeto Euclides. Impa. Rio de Janeiro. 1993.

[3] R. V. Churchill - J. W. Brown. *'Variable Compleja y Aplicaciones'*. Mc Graw - Hill. International Student Edition. 1992.

[4] Jerrold E. Marsden - Michael J. Hoffman. *'Análisis Básico de Variable Compleja'*. Trillas. México. 1996.

[5] Rudin Walter. *'Real and Complex Analysis'*. Tercera edición. McGraw-Hill (1987).

[6] Spiegel, Lipschutz, Schiller, Spellman. *'Variable Compleja'*. Segunda edición edición. McGraw-Hill/Interamericana editores, SA. DE C.V. (2011).

[7] Ahlfors L.V.*'Análisis de Variable Compleja'*. Tercera Edición. McGraw-Hill Book Co. New York (1978).